Тема: Решение уравнения в комплексных числах

Задание. *Решите уравнение (ответ запишите в алгебраической форме):* $shz - chz = 2i$

Решение.

Известно, что гиперболический синус и гиперболический косинус комплексного числа определяются соответственно равенствами:

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$shz - chz = 2i; \quad \frac{e^z - e^{-z}}{2} - \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 2i; \quad \frac{e^z - e^{-z} - e^z - e^{-z}}{2} = 2i;$$

$$\frac{-2e^{-z}}{2} = 2i; \quad e^{-z} = -2i.$$

Поскольку $-2i \neq 0$, то можно прологарифмировать обе части уравнения. Имеем:

$e^{-z} = -2i$; $Ln(e^{-z}) = Ln(-2i)$; $-z = Ln(-2i)$; $z = -Ln(-2i)$.

Справедлива формула:

$$Ln(w) = \ln(|w|) + i(\arg(w) + 2\pi k).$$

В нашем случае $w = -2i$, $|w| = \sqrt{0+4} = 2$, $\arg w = -\pi/2$. Тогда

$$Ln(-2i) = \ln 2 + i(-\pi/2 + 2\pi k), \ k \in Z.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет множество корней:

$$z_k = -\ln 2 - i(-\pi/2 + 2\pi k), \ k \in Z;$$

$$z_k = -\ln 2 + i(\pi/2 - 2\pi k), \ k \in Z.$$

Они представлены в алгебраической форме. Здесь $\operatorname{Re} z_k = \ln 2$, $\operatorname{Im} z_k = \pi/2 - 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $z_k = -\ln 2 + i(\pi/2 - 2\pi k), \ k \in Z$.